

РЕШЕЊА

ТЕСТ ИЗ МАТЕМАТИКЕ ЗА ПРВИ РАЗРЕД СРЕДЊЕ ШКОЛЕ

1. Остатак при дељењу полинома $P(x) = (x^2 + x - 1)^{2n} + (x^2 - x + 1)^{2n} - 2$ биномом $x^2 - x$ је:
А) $\boxed{0}$; Б) 1; В) -1; Г) 2; Д) -2.

Решење. $P(0) = (-1)^{2n} + (1)^{2n} - 2 = 0$ и $P(1) = (1 + 1 - 1)^{2n} + (1 - 1 + 1)^{2n} - 2 = 0$, остатак је $\boxed{0}$.

2. Над катетама $BC = 3$ и $AC = 4$ правоуглог троугла ABC конструисани су квадрати $ACKD$ и $BCEH$. Нека су M и F подножја нормала из тачака H и D на праву AB . Тада је збир $MH + DF$ једнак:

А) 7; Б) $\boxed{5}$; В) 12; Г) 6; Д) 3,5.

Решење. $\triangle ABC \sim \triangle MBH$, па је $MH = \frac{9}{5}$. Слично $\triangle ABC \sim \triangle ADF$, па је $DF = \frac{16}{5}$.
Збир $MH + DF = \boxed{5}$.

3. Дат је једнакостранични троугао ABC . Ако је O његов ортоцентар и $\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OB} = \vec{b}$, $\vec{OC} = \vec{c}$, онда је вектор \vec{b} једнак:

А) $\boxed{-\vec{a} - \vec{c}}$; Б) $\vec{a} + \vec{c}$; В) $-\vec{a} + \vec{c}$; Г) $\vec{a} - \vec{c}$; Д) $\frac{2}{3}(\vec{a} + \vec{c})$.

Решење. Продужимо OB преко тачке O до тачке D тако да је $|OB| = |OD|$ (тачка O је средина дужи BD). Како је O тежиште, то се дужи OD и AC полове, па је $A OCD$ паралелограм и следећи вектори су једнаки $\vec{OA} = \vec{CD} = \vec{a}$ и $\vec{DO} = \vec{OB} = \vec{b}$. Сада је $\vec{OC} + \vec{CD} + \vec{DO} = \vec{0}$, тј. $\vec{c} + \vec{a} + \vec{b} = \vec{0}$, па је $\vec{b} = -\vec{a} - \vec{c}$.

4. Збир година чланова петочлане породице једнак је 80. Двоје најмлађих чланова те породице имају 6, односно 8 година. Колики је био збир година чланова те породице пре 7 година?

А) 35; Б) 36; В) 45; Г) $\boxed{46}$; Д) 66.

Решење. Четири члана породице имају заједно 28 година мање. За најмлађег члана одузимамо само 6 година, па је збир $\boxed{46}$.

5. Након што је играч одиграо 200 партија шаха, проценат партија у којима је он победио био је једнак 49%. Најмањи број партија које играч може да одигра да би му проценат партија у којима је победио порастао на 50% је:

А) 0; Б) 1; В) 2; Г) 3; Д) $\boxed{4}$.

Решење. Играч је победио у 98 одиграних партија. Да би проценат победа порастао на 50% потребно је одиграти још x партија тако да важи $(98 + x) : 50 = (200 + x) : 100$, односно још $\boxed{4}$ партије.

6. Решење једначине

$$\frac{\frac{1}{x+5} - \frac{2}{x-5}}{\frac{3}{x-5} + \frac{4}{x+5}} = -\frac{2}{3}$$

је:

А) 5; Б) -5; В) веће од 5; Г) мање од -5; Д) $\boxed{\text{једначина нема решења}}$.

Решење. После сређивања једначина се своди на једначину $11x = 55$ уз услове $x \notin \{5, -5, \frac{5}{7}\}$. Дакле, $\boxed{\text{једначина нема решења}}$.

7. Дата је једначина $(k^2 - 1)x + k - 1 = 0$, $k \in \mathbf{R}$ и искази:

1. За $k = 1$ дата једначина има бесконачно много решења;
2. За $k = -1$ дата једначина има више од једног решења;
3. За $k \notin \{-1, 1\}$ дата једначина има јединствено решење.

Тачни су:

А) само 1.; Б) само 2.; В) само 1. и 3.; Г) само 1. и 2.; Д) сви искази.

8. Ако су x и y решења система $\frac{1}{x} + \frac{3}{y+1} = \frac{5}{4}$, $\frac{4}{x} - \frac{7}{y+1} = \frac{1}{4}$, онда је њихов збир једнак:

А) 2; Б) 3; В) 5; Г) 1; Д) $\frac{3}{4}$.

Решење. Увођењем смена $\frac{1}{x} = t$ и $\frac{1}{y+1} = v$ довијамо систем $t + 3v = 5/4$, $4t - 7v = 1/4$.

Решење новог система је $t = 1/2$ и $v = 1/4$, па је $x = 2$ и $y = 3$. Збир $x + y = 5$.

9. Колико има петоцифрених бројева којима је производ цифара једнак 4?

А) Мање од 10; Б) 11; В) 12; Г) 13; Д) Више од 13.

Решење. Задатак је могуће урадити исписивањем бројева који задовољавају постављени услов. Други начин био би да се уочи да постоје 2 комбинације цифара 11114 и 11122. Бројева облика 11114 има 5, јер се цифра 5 може поставити на било коју позицију. Бројева облика 11122 има 10, јер можемо фиксирати једну двојку на почетак и другу померити на 4 позиције, затим померити фиксирану двојку на другу позицију и померати другу двојку на позиције десно....

Укупно има 15 оваквих бројева.

10. Последња цифра броја $17^5 + 24^4 - 13^{21}$ је:

А) 0; Б) 3; В) 6; Г) 7; Д) 8.

Решење. Степени броја 7 појављују се циклично у распореду 79317931..., па је $17^5 = 17^{417}$ и последња цифра је 7. Степени броја 4 појављују се у циклусу 4646, па последња цифра броја 24^4 је 6. Слично за број 3 имамо циклус 39713971... па се број $13^{20}13$ завршава цифром 3. Последња цифра израза $7 + 6 - 3$ једнака је 0.

ТЕСТ ИЗ МАТЕМАТИКЕ ЗА ДРУГИ РАЗРЕД СРЕДЊЕ ШКОЛЕ

1. Вредност израза

$$\left(\frac{x-9}{x+3\sqrt{x}+9} : \frac{x^{0,5}+3}{x^{1,5}-27} \right)^{0,5} - x^{0,5}$$

за $x > 9$ је:

А) x ; Б) $3 - 2\sqrt{x}$; В) $\boxed{-3}$; Г) 3 ; Д) \sqrt{x} .

Решење. $\left(\frac{x-9}{x+3\sqrt{x}+9} : \frac{x^{0,5}+3}{x^{1,5}-27} \right)^{0,5} - x^{0,5} = \left(\frac{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}{x+3\sqrt{x}+9} : \frac{\sqrt{x}+3}{(\sqrt{x}-3)(x+3\sqrt{x}+9)} \right)^{0,5} - x^{0,5} = \sqrt{(\sqrt{x}-3)^2} - \sqrt{x} = |\sqrt{x}-3| - \sqrt{x} = \sqrt{x}-3 - \sqrt{x} = \boxed{-3}$.

2. За унети низ бројева, рачунар наставља са сталним исписивањем низа тако што исписује најмањи ненегативни цео број, различит од претходна 4 броја у датом низу. Генеришемо низ тако што записујемо бројеве 2,0,2,3. На 2024. позицији овог низа налази се број:

А) 0; Б) 1; В) 2; Г) $\boxed{3}$; Д) 4.

Решење. Имамо низ 2(02314)(02314)... Видимо да се осим почетне двојке понавља циклус дужине 5, па ако одузмемо први број 2 који не припада циклусу остаје нам исписаних 2023 броја. Остатак при дељењу 2023 бројем 5 је 3, па је у питању трећа цифра циклуса односно $\boxed{3}$.

3. Разлика $\cos^2 \frac{x+y}{2} - \sin^2 \frac{x-y}{2}$ једнака је:

А) $\sin(x-y)$; Б) $\boxed{\cos x \cos y}$; В) $\sin x \sin y$; Г) $\sin x \cos y$; Д) $\sin(x+y)$.

Решење. Користећи једнакости $\cos^2 \alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$ и $\sin^2 \alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$ полазни израз једнак је $\frac{\cos(x+y) + \cos(x-y)}{2} = \boxed{\cos x \cos y}$.

4. Производ решења једначине $\sqrt{x^{\log \sqrt{x}}} = 10$ је:

А) 2; Б) $\boxed{1}$; В) 10^{-2} ; Г) 100; Д) 10.

Решење. За $x > 0$ једначина се може записати у облику $x^{\frac{1}{4} \log x} = 10$. Логаритмовањем добијене једначине имамо $\frac{1}{4} \log^2 x = 1$, па је $\log x = \pm 2$. Сада је $x_1 x_2 = 10^2 \cdot 10^{-2} = \boxed{1}$.

5. Број решења једначине $(\cos x)^{\sin^2 x - \frac{3}{2} \sin x + \frac{1}{2}} = 1$ на интервалу $[0, \frac{\pi}{2})$ је:

А) 0; Б) 1; В) $\boxed{2}$; Г) 3; Д) 4.

Решење. Једначина има решења ако је $\cos x = 1$ или $\sin^2 x - 3/2 \sin x + 1/2 = 0$. За $\cos x = 1$ решење је $x = 0 \in [0, \pi/2)$. Сменом $\sin x = t$ добијамо квадратну једначину $t^2 - 3/2 t + 1/2 = 0$ чија су решења $t \in \{1, 1/2\}$. За $t = 1 \Leftrightarrow \sin x = 1 \Leftrightarrow x = \pi/2 + 2k\pi \notin [0, \pi/2)$. За $t = 1/2 \Leftrightarrow x = \pi/6 \in [0, \pi/2)$. Број решења је $\boxed{2}$.

6. Ако су x_1 и x_2 решења једначине $x^2 + x - 2005 = 0$, тада је $2x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2 + x_1 - 2005$ једнако:

А) 2005; Б) $\boxed{2006}$; В) 2007; Г) 2009; Д) 2010.

Решење. Применом Вијетових формула и трансформацијом почетног израза добијамо да је $2x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2 + x_1 - 2005 = x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2 + x_1^2 + x_1 - 2005 = (x_1 + x_2)^2 - x_1 x_2 + (x_1^2 + x_1 - 2005) = (-1)^2 + 2005 + 0 = \boxed{2006}$.

7. Ако је $\operatorname{tg} \alpha = -7$, за $\alpha \in (\pi/2, \pi)$, тада је $\frac{3 \sin \alpha + \cos \alpha}{\cos \alpha - 3 \sin \alpha}$ једнако:

А) $-\frac{10}{11}$; Б) $\frac{10}{11}$; В) $\frac{11}{20}$; Г) $-\frac{11}{10}$; Д) $\frac{11}{10}$.

Решење. $\frac{3 \sin \alpha + \cos \alpha}{\cos \alpha - 3 \sin \alpha} = \frac{\cos \alpha (3 \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + 1)}{\cos \alpha (1 - 3 \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha})} = \frac{-21 + 1}{1 + 21} = -\frac{10}{11}$.

8. Ако је решење једначине $4^{x+\sqrt{x^2-2}} - 5 \cdot 2^{x-1+\sqrt{x^2-2}} = 6$ облика $\frac{p}{q}$, тада је $p + q$ једнако:

А) -3; Б) 4; В) $\boxed{5}$; Г) -5; Д) -4.

Решење. Уведимо смену $2^{x+\sqrt{x^2-2}} = t$, $t \geq 0$. Полазна једначина постаје $t^2 - 5/2t - 6 = 0$. Решења добијене једначине су $t = 4$ или $t = -3/2$. Сада је $x + \sqrt{x^2 - 2} = 2$, па је $x = 3/2$. Једначина је дефинисана за ову вредност па $3/2$ јесте решење и $3 + 2 = \boxed{5}$.

9. Производ целобројних решења неједначине $\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}(x - 3) > \log_{\frac{1}{2}}(x + 3)$ једнак је:

А) 150; Б) 120; В) 60; Г) 30; Д) $\boxed{20}$.

Решење. За $x > 3$ једначину можемо записати у облику $-2 \log_2(x - 3) + \log_2(x + 3) > 0 \Leftrightarrow \log_2 \frac{x + 3}{(x - 3)^2} > 0 \Leftrightarrow \frac{x + 3}{(x - 3)^2} > 1 \Leftrightarrow \frac{-x^2 + 7x - 6}{(x - 3)^2} > 0$. Последња неједначина је тачна за $x \in (3, 6)$, па су целобројна решења 4 и 5, а њихов производ $\boxed{20}$.

10. Колико има природних бројева који су решења неједначине $\frac{|x^2 - 2x| + 4}{|x + 2| + x^2} \geq 1$?

А) 0; Б) $\boxed{1}$; В) 2; Г) 3; Д) 4.

Решења. Тражимо природне бројеве па нас занимају само решења за $x > 0$. Нека је $x \in (0, 2]$. Посматрамо неједначину $\frac{-x^2 + 2x + 4}{x^2 + x + 2} \geq 1$ чија решења припадају интервалу $(0, \frac{1 + \sqrt{17}}{4}]$. Једино решење које припада скупу природних бројева је 1. На интервалу $(2, +\infty)$ неједначина $\frac{x^2 - 2x + 4}{x^2 + x + 2} \geq 1$ нема решења ($x < 2/3$). Укупан број природних бројева који су решење неједначине је 1.

РЕШЕЊА

ТЕСТ ИЗ МАТЕМАТИКЕ ЗА ТРЕЋИ РАЗРЕД СРЕДЊЕ ШКОЛЕ

1. Нека су α , β и γ корени полинома $x^3 + px^2 + qx + 1 = 0$. Вредност детерминанте

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \gamma & \alpha & \beta \\ \beta & \gamma & \alpha \end{vmatrix} \text{ је:}$$

А) $p^2 - 3pq$; Б) $p^2 - 2pq + 1$; В) -1 ; Г) $-p^2 + 2pq$; Д) $\boxed{p^2 - 3q}$.

Решења. $\Delta = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - (\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma)$. Применом Вијетових формула имамо да је $\alpha + \beta + \gamma = -p$ и $\alpha\beta + \beta\gamma + \alpha\gamma = q$, па је $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = (\alpha + \beta + \gamma)^2 - 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \alpha\gamma) = p^2 - 2q$. Сада је $\Delta = p^2 - 2q - q = \boxed{p^2 - 3q}$.

2. Конструисана је тангента параболе $y^2 = 2px$ у тачки M . Нека је пресечна тачка тангенте и x -осе тачка A , а B пројекција тачке M на x -осу. Ако је T теме параболе, онда је однос $AT : TB$ једнак:

А) $\boxed{1}$; Б) 2 ; В) $\frac{1}{2}$; Г) 3 ; Д) $\frac{1}{3}$.

Решење. Из услова додира праве и параболе $yy_0 = p(x + x_0)$ имамо да су координате тачке $M(x_0, y_0)$. Пресечна тачка тангенте и x -осе добија се из једнакости $0 = p(x + x_0)$, па су њене координате $A(-x_0, 0)$. Теме T полови дуж AB , па је $AT : TB = \boxed{1 : 1}$.

3. Дат је једнакостранични троугао ABC странице 1 тако да је $\vec{AB} = \vec{a}$, $\vec{BC} = \vec{b}$ и $\vec{CA} = \vec{c}$. Тада је вредност

$$\vec{a} \circ \vec{b} + \vec{b} \circ \vec{c} + \vec{c} \circ \vec{a}$$

једнака:

А) $\frac{3}{2}$; Б) $\frac{1}{2}$; В) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; Г) $-\frac{1}{2}$; Д) $\boxed{-\frac{3}{2}}$.

Решење. Важи да је $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$, па је $\vec{a} = -\vec{b} - \vec{c}$. Сада је $\vec{a} \circ \vec{b} + \vec{b} \circ \vec{c} + \vec{c} \circ \vec{a} = (-\vec{b} - \vec{c}) \circ \vec{b} + \vec{b} \circ \vec{c} + \vec{c} \circ (-\vec{b} - \vec{c}) = -\vec{b} \circ \vec{b} - \vec{c} \circ \vec{b} + \vec{b} \circ \vec{c} - \vec{c} \circ \vec{b} - \vec{c} \circ \vec{c} = -1 - \cos 120^\circ - 1 = \boxed{-3/2}$.

4. Геометријско место тежишта троуглова чија су темена $A(1, 3)$, $B(5, 6)$, а треће теме припада правој $y = 3x + 6$ је права $y = kx + n$. Тада је збир $k + n$ једнак:

А) $\boxed{2}$; Б) -2 ; В) 1 ; Г) -1 ; Д) 9 .

Решење. Треће теме има координате $C(x_0, 3x_0 + 6)$, а тежиште $T(\frac{6 + x_0}{3}, 5 + x_0)$. Геометријско место тачака задовољава једнакост $5 + x_0 = k(\frac{6 + x_0}{3}) + n$, па је $(k, n) = (3, -1)$ и њихов збир је $\boxed{2}$.

5. Ако су a , b и c истовремено пети, седамнаести и тридесет седми члан аритметичке и геометријске прогресије, тада је

$$a^{b-c} \cdot b^{c-a} \cdot c^{a-b}$$

једнако:

А) $\frac{1}{3}$; Б) $\boxed{1}$; В) $\frac{1}{2}$; Г) $\frac{1}{4}$; Д) -1 .

Решење. Имамо да су $b = a + 12d = aq^{12}$ и $c = a + 32d = aq^{32}$. Сада је $a^{b-c} \cdot b^{c-a} \cdot c^{a-b} = a^{-20d}(aq^{12})^{32d}(aq^{32})^{-12d} = \boxed{1}$.

6. За природан број n са $p(n)$ обележимо производ цифара броја n . На пример, $p(12) = 1 \cdot 2 = 2$. Вредност збира

$$p(10) + p(11) + \dots + p(99) + p(100)$$

је:

- А) $\boxed{2025}$; Б) 4500; В) 5005; Г) 5050; Д) ниједан од понуђених одговора.

Решење. Збир $p(10) + p(11) + \dots + p(19) = 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + \dots + 1 \cdot 9 = 1 \cdot (0 + 1 + \dots + 9) = 1 \cdot 45$. Тражени збир можемо записати у облику $1 \cdot 45 + 2 \cdot 45 + \dots + 9 \cdot 45 + 1 \cdot 0 \cdot 0 = 45 \cdot 45 = \boxed{2025}$.

7. У елипсу $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} = 1$ уписан је једнакостранични троугао чије је једно теме тачка $A(6, 0)$. Дужина странице овог троугла је:

- А) $\frac{24}{7}$; Б) $\frac{12\sqrt{3}}{7}$; В) $\boxed{\frac{24\sqrt{3}}{7}}$; Г) $\frac{12}{7}$; Д) $6\sqrt{3}$.

Решење. Коефицијент правца праве којој припада једна од страница траженог троугла (AC) је $k = \operatorname{tg} 30^\circ = \sqrt{3}/3$, а једначина те праве је $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - 2\sqrt{3}$. Пресечна тачка C ове праве и елипсе је $C(\frac{6}{7}, -\frac{12\sqrt{3}}{7})$. Тачка B има координате $B(\frac{6}{7}, \frac{12\sqrt{3}}{7})$. Дужина странице троугла једнака је $\boxed{\frac{24\sqrt{3}}{7}}$.

8. Параметар $a \in \mathbf{R}$ за који је систем једначина

$$\begin{aligned}x + y + z &= 6; \\ax + 4y + z &= 5; \\6x + (a + 2)y + 2z &= 13\end{aligned}$$

немогућ једнак је:

- А) $\boxed{4}$; Б) -4; В) 3; Г) -3; Д) 2.

Решење. Детерминанте система су $\Delta = (a + 3)(a - 4)$, $\Delta_x = -3 - a$, $\Delta_y = a + 3$ и $\Delta_z = 6(a - 4)(a + 3)$. За $\boxed{a = 4}$ једначина нема решења јер је $\Delta_x \neq 0$.

9. Вредност реаланог параметра a за који пресечна тачка правих $3x + (a + 4)y = 7$ и $5x - (a + 2)y = 3$ припада правој $6x + y = 1$ је:

- А) $\boxed{-3}$; Б) 3; В) 1; Г) -1; Д) 6.

Решење. Пресечна тачка правих је облика $(\frac{5a + 13}{4a + 13}, \frac{13}{4a + 13})$, за $a \neq -\frac{13}{4}$. Заменом тачке у једначину праве добијамо једначину $26a = -78$ чије је решење $\boxed{-3}$.

10. Око лопте полупречника r , ($r \in \mathbf{R}$) описана је права купа висине $4r$. Однос запремина лопте и купе једнак је:

- А) 3:4; Б) $\boxed{1:2}$; В) 5:6; Г) 4:9; Д) 2:1.

Решење. Из сличности троуглова добијамо да је полупречник купе $r_k = \sqrt{2}r$, па је однос запремина $\frac{4}{3}r^3\pi : \frac{8}{3}r^3\pi = \boxed{1:2}$.

РЕШЕЊА

ТЕСТ ИЗ МАТЕМАТИКЕ ЗА ЧЕТВРТИ РАЗРЕД СРЕДЊЕ ШКОЛЕ

1. Функција $f(x)$ је таква да је $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$ за све реалне бројеве x и y и $f(1) = 2$.
Вредност израза

$$\frac{f(2)}{f(1)} + \frac{f(3)}{f(2)} + \dots + \frac{f(2024)}{f(2023)}$$

је:

- А) 2023; Б) $\frac{1}{2}$; В) 2; Г) 2024; Д) $\boxed{4046}$.

Решење. $\frac{f(n+1)}{f(n)} = \frac{f(n)f(1)}{f(n)} = f(1) = 2$. У траженом збиру је 2023 сабирка и сваки од њих једнак је 2, па је збир једнак $\boxed{4046}$.

2. Највећа вредност функције $f(x) = \sin(\sin x)$, $x \in \mathbf{R}$ је:

- А) 2; Б) 1; В) $\boxed{\sin 1}$; Г) $\pi/2$; Д) $\arcsin 1$.

Решење. $f'(x) = \cos(\sin x) \cos x = 0$ за $\sin x = \pi/2 + k\pi$ или $x = \pi/2 + k\pi$. У добијеним тачкама вредности функције су $f(\pi/2) = \sin 1$ и $f(-\pi/2) = -\sin 1$. Провером другог извода функције утврђује се да је највећа вредност $\boxed{\sin 1}$.

3. Дата су три различита производа фабрике А, четири различита производа фабрике В и пет различитих производа фабрике С. На колико различитих начина се сви производи могу поређати у низ уз следеће услове : производи фабрике В су један поред другог, производи фабрике С су један поред другог, никоја два производа фабрике А нису један поред другог ?

- А) 5!; Б) 4!5!; В) 3!4!5!; Г) $\boxed{2!3!4!5!}$; Д) $12 \cdot 3!$.

Решење. Производе фабрике А можемо распоредити на 3! начина на 3 фиксираних позиције (1,3,5). Производе фабрике В распоређујемо на 4! начина унутар групе, а фабрике С на 5! начина. Број распореда група В и С је 2!, па је укупан број распореда $\boxed{2!3!4!5!}$.

4. Максимална површина правоугаоника уписаног у област која је ограничена параболом $y = 1 - x^2$ и правом $y = 0$, тако да му једна страница припада x -оси јесте:

- А) $\frac{\sqrt{3}}{9}$; Б) $\boxed{\frac{4\sqrt{3}}{9}}$; В) $\frac{8\sqrt{3}}{9}$; Г) $\sqrt{3}$; Д) $\frac{2\sqrt{3}}{9}$.

Решење. Нека је $(x, 0)$ доње десно теме посматраног правоугаоника, а $(x, 1 - x^2)$ горње десно теме. Тада је његова површина $P = 2x(1 - x^2)$. Сада је $P' = 2 - 6x^2 = 0$, па је $x = 1/\sqrt{3}$ и $1 - x^2 = 2/3$. Тражена површина је $\boxed{\frac{4\sqrt{3}}{9}}$.

5. Вредност

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \right)$$

је:

- А) 0; Б) $\boxed{1}$; В) 2; Г) $\frac{1}{2}$; Д) $+\infty$.

Решење. Израз $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$.
Када $x \rightarrow +\infty$ израз тежи $\boxed{1}$.

6. У развоју бинома $\left(\sqrt[3]{x^2} + \frac{y}{x}\right)^n$ коефицијент трећег члана је за 5 већи од коефицијента другог члана. Коефицијент члана који не садржи x је:

А) 1; Б) 5; В) $\boxed{10}$; Г) 3; Д) 2.

Решење. $\binom{n}{2} = \binom{n}{1} + 5$, па је $\frac{n(n-1)}{2} = n + 5$ и $n = 5$ је решење добијене једначине.

Члан који не садржи x задовољава једнакост да је $\frac{2}{3}(5-k) - k = 0$, па је $k = 2$ и тражени коефицијент је $\binom{5}{2} = \boxed{10}$.

7. Нека је $y = \left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)^n$. Израз

$$(1 + x^2)y'' + xy' - n^2y$$

је једнак:

А) x^3 ; Б) x^2 ; В) x ; Г) 1; Д) $\boxed{0}$.

Решење. $y' = n(x + \sqrt{x^2 + 1})^n \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} = ny \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$. Други извод једнак је

$$y'' = \frac{n^2(x + \sqrt{x^2 + 1})^n - nx(x + \sqrt{x^2 + 1})^n \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}}{x^2 + 1} = \frac{n^2y - nxy \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}}{x^2 + 1}. \text{ Заменом вредности } y$$
$$\text{задати израз добијамо } n^2y - nxy \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} + nxy \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} - n^2y = \boxed{0}.$$

8. Нека је

$$I(x) = \int_1^x \frac{2t \ln t}{(1 + t^2)^2} dt.$$

Тада је $\lim_{x \rightarrow +\infty} I(x)$:

А) $\boxed{\frac{1}{2} \ln 2}$; Б) $\ln 2$; В) $2 \ln 2$; Г) $\ln \frac{1}{2}$; Д) $2 \ln \frac{1}{2}$.

Решење. $\int_1^x \frac{2t \ln t}{(1 + t^2)^2} dt$ парцијално интеграцијом за $u = \ln t$ и $dv = \frac{2t}{(1 + t^2)^2}$ своди се на $-\frac{\ln t}{1 + t^2} \Big|_1^x + \int_1^x \frac{dt}{t(1 + t^2)} = -\frac{\ln t}{1 + t^2} \Big|_1^x + \int_1^x \left(\frac{1}{t} - \frac{t}{1 + t^2}\right) dt = -\frac{\ln t}{1 + t^2} \Big|_1^x + \ln |t| \Big|_1^x - \frac{1}{2} \ln(1 + t^2) \Big|_1^x = -\frac{\ln x}{1 + x^2} + \ln x - \frac{1}{2} \ln(1 + x^2) + \frac{1}{2} \ln 2 = -\frac{\ln x}{1 + x^2} + \frac{1}{2} \ln \frac{x^2}{1 + x^2} + \frac{1}{2} \ln 2$. Када $x \rightarrow +\infty$ прва два сабирка теже 0, па је тражена вредност $\boxed{\frac{1}{2} \ln 2}$.

9. Колико се процената области дефинисаности функције

$$f(x) = \frac{\sqrt{9 - x^2}}{\sqrt[4]{9 - |2x + 5|}}$$

састоји од позитивних бројева?

А) 50%; Б) $\boxed{40\%}$; В) 25%; Г) 75%; Д) 80%.

Решење. Функција је дефинисана ако је $9 - x^2 \geq 0$ и $9 - |2x + 5| > 0$.

$9 - x^2 \geq 0$ има решења за $x \in [-3, 3]$.

$9 - |2x + 5| > 0 \Leftrightarrow |2x + 5| < 9 \Leftrightarrow -9 < 2x + 5 < 9$, па је $-7 < x < 2$.

Област дефинисаности је $x \in [-3, 2)$, па се позитивне вредности налазе у интервалу $(0, 2)$ што је $2/5$, односно $\boxed{40\%}$.

10. Број целих бројева a који задовољавају неједнакост

$$\int_0^1 (a + (4 - a)x + 4a^2x^3) \, dx \leq \frac{17a - 28}{2}$$

је:

А) 0; Б) $\boxed{1}$; В) 3; Г) 6; Д) 7.

Решење. $\int_0^1 (a + (4 - a)x + 4a^2x^3) \, dx = ax|_0^1 + (4 - a)\frac{x^2}{2}|_0^1 + 4a^2\frac{x^4}{4}|_0^1 = a + \frac{4 - a}{2} + a^2$.

Посматрамо неједначину $a + \frac{4 - a}{2} + a^2 \leq \frac{17a - 28}{2} \Leftrightarrow (a - 4)^2 \leq 0$ чије је једино решење 4, па постоји $\boxed{1}$ целобројно решење.