ЗАДАЦИ

1. Вредност израза $\frac{5}{4}a^2 - 3(a-b)(a+b) + \frac{(a+b)^2}{2} - \frac{14b^2-5a^2}{4}$ за $a = 1\frac{2}{3}$, $b = 1\frac{4}{5}$, једнака је:

А) 3 **Б)** 0 **В)** 1 **Г)** 2 **Д)** -3

Решење. $\frac{5}{4}a^2 - 3(a-b)(a+b) + \frac{(a+b)^2}{2} - \frac{14b^2-5a^2}{4} = ab = 3.$

Одговор **А**.

2. Основна ивица правилне шестостране призме је $3cm$, а дијагонала бочне стране је $6cm$. Запремина те призме је (у cm^3):

А) 243 **Б)** $\frac{243}{2}$ **В)** $\frac{243}{4}$ **Г)** $\frac{243}{3}$ **Д)** $\frac{243\sqrt{3}}{2}$

Решење. Висина призме је $H = \sqrt{36-9} = 3\sqrt{3}$. Запремина призме је $V = \frac{3\cdot 3^3\sqrt{3}}{2}\cdot 3\sqrt{3} = \frac{243}{2}$.

Одговор **Б**.

3. Површина четвороугла ограниченог графицима функција $y = -2x+2$ и $y = -\frac{3}{4}x + 3$ и координатним осама (у првом квандранту) једнака је:

А) $\frac{15}{2}$ **Б)** 6 **В)** 5 **Г)** 4 **Д)** 3 **Ђ)** $\frac{7}{2}$

Решење. График функције $y = -2x+2$ сече координатне осе у тачкама $A(0,2)$ и $B(1,0)$, а график функције $y = -\frac{3}{4}x+3$ у тачкама $C(4,0)$ и $D(0,3)$. Површина четвороугла $ABCD$ је $P_{ABCD} = P_{OCD} - P_{OAB} = 6 - 1 = 5$.

Одговор **В**.

4. Ивица коцке $ABCDA_1B_1C_1D_1$ је $10cm$. Површина пресека коцке и равни која је одређена теменима A, B и C_1 је (у cm^2):

А) $50\sqrt{2}$ **Б)** $50\sqrt{6}$ **В)** $100\sqrt{2}$ **Г)** $75\sqrt{3}$ **Д)** $50\sqrt{3}$

Решење. Добијена фигура је правоугаоник чија је једна страница ивици коцке, а друга страница је дијагонала бочне стране. $P = a^2\sqrt{2} = 100\sqrt{2}$.

Одговор **В**.

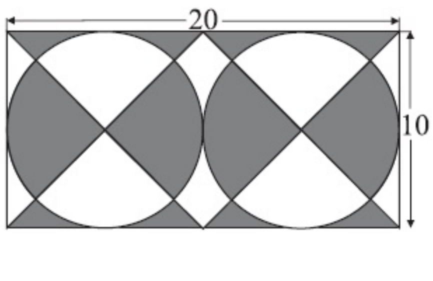
5. У равни се налазе четири круга полупречника 1 cm, 3 cm, 5 cm и 7 cm и права l коју додирују сви кругови у тачки A. Фигуру S чине све тачке које се налазе у унутрашњости само једног круга. Кругови могу бити са обе стране праве l. Највећа могућа површина фигуре S у cm^2 је:

А) 24π **Б)** 32π **В)** 64π **Г)** 65π **Д)** 84π

Решење. Кругови полупречника 5 и 7 су са различитих страна праве l. Кругови полупречника 1 и 3 су са исте стране. Површина фигуре је $P_7 + P_5 - P_3 = (49+25-9)\pi = 65\pi$.

Одговор **Г**.

6. Колика је површина осенченог дела на слици?



А) 50 **Б)** 80 **В)** 100 **Г)** 120 **Д)** 150

Решење. Премештањем осенчених делова попуњава се тачно половина датог правоугаоника. Тражена површина је 100.

Одговор **В**.

7. Једнакокраки правоугли троугао са катетама $2\sqrt{2}cm$ чија хипотенуза припада равни α нагнут је према тој равни под углом од 45° . Површина пројекције овог троугла на раван α је (у cm^2):

А) $4\sqrt{2}$ **Б)** $2\sqrt{2}$ **В)** $\sqrt{2}$ **Г)** 2 **Д)** 4

Решење. Нека је ABC посматрани једнакокраки правоугли троугао са правим углом у темену C. Нека је C' пројекција тачке C на раван α и $D \in AB$ подножје нормале из темена C. Дужина хипотенузе AB је $4\,cm$, а дужина висине CD је $2cm$. Троугао $CC'D$ је једнакокраки правоугли троугао са хипотенузом CD, па је $CC' = C'D = \sqrt{2}\,cm$. Како је $C'D \perp AB$ то је површина троугла ABC' једнака $\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{2}\,cm^2$.

Одговор **Б**.

8. Ако су x и y реални бројеви, тада је најмања могућа вредност израза $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 15$ једнака:

А) 1 **Б)** 2 **В)** 3 **Г)** 4 **Д)** 5

Решење. $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 15 = (x+2)^2 + (y-3)^2 + 2$, па је најмања вредност израза 2.

Одговор **Б**.

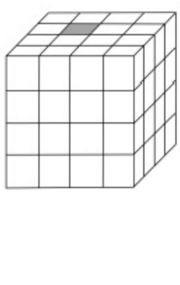
9. Мајмуни деле кокосове орахе. Први мајмун је узео три ораха и десети део остатка; други мајмун шест ораха и десети део преосталих ораха; трећи мајмун девет ораха и десети део преосталих ораха итд..., све док сви ораси нису били подељени. Испоставило се да су сви мајмуни добили исти број ораха. Број мајмуна је:

А) мањи од 5 **Б)** 5 **В)** већи од 5 а мањи од 9 **Г)** 9 **Д)** већи од 9

Решење. Нека је x укупан број ораха. Први мајмун добио је $3 + \frac{1}{10}(x-3)$ ораха и преостало је $\frac{9}{10}(x-3)$. Други мајмун добио је $6 + \frac{1}{10}\left(\frac{9}{10}(x-3) - 6\right)$ ораха. Како су сви мајмуни добили једнак број ораха из једначине $3 + \frac{1}{10}(x-3) = 6 + \frac{1}{10}\left(\frac{9}{10}(x-3) - 6\right)$ добија се да је укупан број ораха $x = 243$. Што значи да је први мајмун добио $3 + 24 = 27$ ораха и да је број мајмуна $243 : 27 = 9$.

Одговор **Г**.

10. Коцка на слици се састоји од 64 мале коцке. Тачно једна коцка је сива. Првог дана сива коцка промени боју свих својих суседних коцки у сиву (коцке су суседне ако имају заједничку страну). Другог дана све сиве коцке ураде исто. Колико сивих коцки ће бити на крају другог дана?



А) 13 **Б)** 14 **В)** 15 **Г)** 16 **Д)** 17

Решење. Након првог дана распоред сивих коцки по нивоима је следећи:

$$N_1 = \begin{matrix} B & S & B & B \\ S & S & S & B \\ B & S & B & B \\ B & B & B & B \end{matrix}, \quad N_2 = \begin{matrix} B & B & B & B \\ B & S & B & B \\ B & B & B & B \\ B & B & B & B \end{matrix}.$$

Други дан:

$$N_1 = \begin{matrix} S & S & S & B \\ S & S & S & S \\ S & S & S & B \\ B & S & B & B \end{matrix}, \quad N_2 = \begin{matrix} B & S & B & B \\ S & S & S & B \\ B & S & B & B \\ B & B & B & B \end{matrix}, \quad N_3 = \begin{matrix} B & B & B & B \\ B & S & B & B \\ B & B & B & B \\ B & B & B & B \end{matrix},$$

па је укупан број сивих коцки 17.

Одговор **Д.**